Exercice 25.

1) Soit $f : x \mapsto x + \ln x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme de fonctions strictement croissantes, f l'est aussi. De plus, f est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$: par le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $f(\mathbb{R}_+^*)$. Or, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ (par somme de limites). Ainsi, comme $f(\mathbb{R}_+^*)$ est un intervalle, on a $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists! x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = y$$

En particulier, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists! x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = x + \ln x = n$$

et c'est bien ce qu'on souhaite démontrer.

2) Par ce qui précède, $x_n = f^{-1}(n)$. Or (toujours par le théorème de la bijection), f^{-1} est strictement croissante, donc x_n l'est aussi. Montrons maintenant que $x_n \to +\infty$.

   - Si (x_n) n'est pas majorée, comme elle est croissante, on a bien $x_n \to +\infty$.
   - Si (x_n) est majorée, comme elle est croissante, elle tend vers une limite finie ℓ. Alors, en passant à la limite dans la relation $x_n + \ln x_n = n$, on obtient

     $$\ell + \ln \ell = +\infty$$

     ce qui est absurde.

   Finalement, $x_n \to +\infty$.